MA'RUZA

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Mavzuning rejasi

1. Differensial tenglamalar. Ta'riflar.
2. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.
3. O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalar.
4. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

Tayanch so'z va iboralar: differensial tenglama, differensial tenglamani integrallash, oddiy differensial tenglama, differensial tenglamani tartibi, umumiy yechimi, umumiy integrali, Koshi masalasi, xususiy yechimi.

1. Asosiy tushuncha va ta'riflar

1-ta'rif: Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi x noma'lum, $y=f(x)$ funksiya va uning $y', y'', ..., y^{(n)}$ hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi. Differensial tenglama simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}=0 \quad \text{yoki} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Agar izlanayotgan funksiya $y=f(x)$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama oddiy differenisial tenglama deyiladi. Biz faqat oddiy differensial tenglamalar bilan shug'ullanamiz. Agar noma'lum funksiya ikki va undan ortiq erkli o'zgaruvchilarining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglamaga xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

2- ta'rif: Differensial tenglamaning tartibi deb, tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan, $y'-3x^2y+2=0$ tenglama birinchi tartibli differensial tenglamadir. Mana bu $y''+py'+qy-\sin x=0$ tenglama esa ikkinchi tartibli differensial tenglamadir va hokazo.

3- ta'rif: Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb, differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

1-misol: $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$ tenglama berilgan bo'lsin. $y=\sin 3x$, $y=\cos 3x$, $y=3\sin 3x-\cos 3x$ funksiyalar, umuman, $y=C_1\sin 3x$, $y=C_2\cos 3x$, $y=C_1\sin 3x+C_2\cos 3x$ ko'rinishdagi funksiyalar, C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlarning har qanday qiymatlarida ham berilgan differensial tenlamaning yechimi bo'ladi, buning to'g'riligini ko'rsatilgan funksiyalarni berilgan tenglamaga qo'yib ko'rib, ishonch hosil qilinadi.

2-misol: Ushbu $y'x-x^2-y=0$ tenglamani qaraymiz. Buning yechimlari $y=x^2+Cx$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda C-ixtiyoriy o'zgarmas son. Haqiqatan ham, $y=x^2+Cx$ funksiyani differensiallaymiz, $y'=2x+C$ ni topamiz, y va y' ni berilgan tenglamaga qo'yib, $(2x+C)x-x^2-x^2-Cx=0$ ayniyatni xosil qilamiz. 1- va 2-misollarda ko'rilgan tenglamalardan har birini cheksiz ko'p yechimlar bor ekanini ko'ramiz.

2. Birinchi tartibli differensial tenglama

Birinchi tartibli differensial tenglama $F(x, y, y')=0$ yoki $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ shaklda bo'ladi. Agar bu tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni $y'=f(x,y)$ (1) ko'rinishda yozish mumkin, bu holda tenglamaga hosilaga nisbatan yechilgan deb aytamiz. Bu tenglama uchun quyidagi **Koshe teoremasi** o'rinli:

Koshi teoremasi: Agar $y' = f(x,y)$ tenglamada $f(x,y)$ funksiya va undan y bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosila XOY tekislikdagi (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga olgan biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamani $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yagona $y = \varphi(x)$ yechimi mavjuddir. $y' = f(x,y)$ tenglamani $x = x_0$ da $y = y_0$ bo'ladigan yechimini topish, Koshi masalasi deb aytiladi.

4- ta'rif: Birinchi tartibli differensial tenglamani umumiy yechimini deb, bitta ixtiyoriy C-o'zgarmasga bog'liq bo'lgan hamda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x,C)$ (2) funksiyaga aytiladi.

a) Bu funksiya differensial tenglamani C o'zgarmas sonning har qanday qabul qilishi mumkin bo'lgan aniq qiymatlarida ham qanoatlantiradi.

b) $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$, ya'ni $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham C ning shunday $C = C_0$ qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Bunda x_0 va y_0 qiymatlar x va y o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasining yechim mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning shartlari bajariladigan qismiga tegishli deb faraz qilinadi.

5- ta'rif: Ixtiyoriy C o'zgarmasga ma'lum $C = C_0$ qiymat berish natijasida $y = \varphi(x,C)$ umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday munosabat (1) tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

3-misol: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Birinchi tartibli tenglamani umumiy yechimi $y = \frac{C}{x}$ funksiyalar oilasidan iborat. Uni to'g'riligini bilish uchun $y = \frac{C}{x}$ ni tenglamaga qo'yib, tekshirish mumkin. $x_0 = 2$ bo'lganda, $y_0 = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topamiz. Bu qiymatlarni $y = \frac{C}{x}$ tenglamaga qo'yib, $1 = \frac{C}{2}$ yoki $C = 2$ ni topamiz. Demak, izlangan xususiy yechim $y = \frac{2}{x}$ funksiya bo'ladi.

Birinchi tartibli (1) ko'rinishdagi differensial tenglamaning geometrik ma'nosini aniqlaylik. (1) ning umumiy yechimi $y = \varphi(x,C)$ bo'lsin.

Bu umumiy yechim XOY tekislikda integral egri chiziqlar oilasini beradi. (1) tenglamada $\frac{dy}{dx} = y'$ hosilaning koordinatalari x va y bo'lgan har bir M nuqtadagi qiymatni, ya'ni shu M nuqtadan o'tuvchi integral egri chiziqqa va shu nuqtadan o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentini aniqlaydi. Shunday qilib, (1) differensial tenglama yo'nalishlar to'plamini beradi yoki boshqacha aytganda, XOY tekislikda yo'nalishlar maydonini aniqlaydi. Demak, differensial tenglamani integrallash masalasini geometrik ma'nosi urinmalarning yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan egri chiziqlarni topish ekan. (1) diferensial tenglama uchun $\frac{dy}{dx} = C = const$ munosabat bajariladigan qutblarning geometrik o'rni berilgan differensial tenglamaning izoklinasi deyiladi. C ning turli qiymatlarida turli izoklinalar hosil qilamiz. C ning qiymatiga mos izoklinalar tenglamasi $f(x,y) = C$ bo'ladi. 1-rasmda, berilgan differensial tenglamaning izoklinlari $\frac{y}{x} = C$ yoki $y = Cx$ dan iborat (1-rasm). Bu to'g'ri chiziqlar oilasi $x = 0$ bo'lishi mumkin emas.

Endi quyidagi masalani ko'rib chiqamiz: Bitta C parametrga bog'liq bo'lgan $y = \varphi(x,C)$ (2) funksiyalar oilasini qaraymiz. Bunda tekislikni har bir nuqtasidan bu oilaning faqat bitta egri chizig'i o'tadi. Bu funksiyalar oilasi qanday differensial tenglamaning umumiy integrali bo'ladi. (2) munosabatdan, x bo'yicha differensial olib, $\frac{dy}{dx} = \varphi_x'(x,C)$ (3) ifodani topamiz. Tekislikning har bir nuqtasidan $y=\varphi(x,C)$ ni faqat bitta egri chizig'i o'tgani sababli, x va y sonlarning har bir jufti uchun (2) dan C ning faqat bitta qiymati aniqlanadi. C ning bu qiymatini (3) ga qo'ysak, $\frac{dy}{dx}$ ni x va y ning funksiyasi kabi aniqlaymiz. Bu esa bizga (2) oilaning har qanday funksiyasi qanoatlantiradigan differensial tenglamani beradi. Demak, x,y va $\frac{dy}{dx}$ orasidagi bog'lanishni belgilash uchun, ya'ni umumiy integrali (2) bilan aniqlanadigan differensial tenglamani yozish uchun, (2) va (3) lardan S ni yo'qotish kerak bo'lar ekan.

3. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar

Birinchi tartibli $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (1) tenglamada, o'ng tomoni faqat x ga bog'liq funksiya bilan, faqat y ga bog'liq funksiyalarning ko'paytmasidan iborat bo'lgan, $\frac{du}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$ (4) ko'rinishdagi differensial tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani quyidagicha almashtirib ($f_2(y)\neq 0$, deb faraz qilib) yozamiz.

$$\frac{1}{f_2(y)}dy=f_1(x)dx. \tag{5}$$

(5) ni har ikkala tomonini integrallasak, $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$ ni hosil qilamiz. Biz, bu yechimni x erkli o'zgaruvchi va ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorni bog'lovchi munosabatni, ya'ni (4) tenglamaning umumiy integralini hosil qildik. (5) ko'rinishdagi differensial tenglama $M(x)dx+N(y)dy=0$ (6)
o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning umumiy integrali, uni har ikkala tomonini integrallab topiladi.

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C \tag{7}$$

4-misol: O'zgaruvchilari ajralgan $xdx+ydy=0$ tenglama berilgan, uning umumiy integralini toping.

Yechish: Buni $2xdx+2ydy=0$ shaklda yozib, ikkala tomonini integrallasak, umumiy integrali topiladi. Chap tomoni manfiy emas, $C=C^2$ desak, $x^2+y^2=C^2$ bo'lib, bunda $C\geq 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa markazi koordinatalar boshida va radiusi S bo'lgan aylanalar oilasini beradi.

Ushbu $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)=0$ (8) ko'rinishdagi tenglamaga o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Uni har ikkala tomonini $N_1(y)M_2(x)$ ifodaga bo'lish yo'li bilan, o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltiriladi (Bunda $N_1M_2\neq 0$).

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx+\frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Uning har ikkala tomonini integrallab, umumiy integrali topiladi.

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C$$

5-misol: Ushbu $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ tenglama berilgan, uning umumiy yechimini toping.

Yechish: Tenglamani $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ shaklda ifodalab, o'zgaruvchilarini ajratamiz va uni integrallab, $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+\ln C$, $\ln|y|=-\ln|x|+\ln C \Rightarrow \ln\frac{y}{x}=\ln C\Rightarrow \frac{y}{x}=C\Rightarrow y=Cx$ umumiy yechimini topamiz.